

DANTE  
Deutschsprachige  
Anwendervereinigung T<sub>E</sub>X e.V.

Uwe Kern: *Darstellung sichtbarer Wellenlängen in üblichen Farbmodellen*, Die T<sub>E</sub>Xnische Komödie 4/2005, S. 16–25.

Reproduktion oder Nutzung dieses Beitrags durch konventionelle, elektronische oder beliebige andere Verfahren ist nur im nicht-kommerziellen Rahmen gestattet. Verwendungen in größerem Umfang bitte zur Information bei DANTE e.V. melden. Für kommerzielle Nutzung ist die Zustimmung der Autoren einzuholen.

Die T<sub>E</sub>Xnische Komödie ist die Mitgliedszeitschrift von DANTE, Deutschsprachige Anwendervereinigung T<sub>E</sub>X e.V. Einzelne Hefte können von Mitgliedern bei der Geschäftsstelle von DANTE, Deutschsprachige Anwendervereinigung T<sub>E</sub>X e.V. erworben werden. Mitglieder erhalten Die T<sub>E</sub>Xnische Komödie im Rahmen ihrer Mitgliedschaft.

## Darstellung sichtbarer Wellenlängen in üblichen Farbmodellen

### Uwe Kern

Seit Version 2.06 bietet das `xcolor`-Paket [6, 7] ein neues Farbmodell `wave` an, das der Visualisierung von Wellenlängen dient. Dieser Artikel beschreibt den dazu verwendeten Algorithmus.

### Einleitung

Im Physikunterricht lernt man in der Regel das *elektromagnetische Spektrum* kennen: Es reicht von sehr kurzen Wellenlängen ( $\gamma$ -Strahlung) über Röntgen- und ultraviolette Strahlen bis hin zu diversen Arten von Funk- und Radiowellen. Ein relativ schmaler Ausschnitt von Wellenlängen (ungefähr 400 bis 750 nm) ist der *sichtbare Bereich* – also das, was wir als „Licht“ wahrnehmen und bezeichnen.

Fast jeder hat schon ein Prisma aus nächster Nähe gesehen und dessen Aufächerung eines „weißen“ Lichtstrahls in eine Vielzahl von Farben bewundert. Wer an physikalischen Themen eher weniger interessiert ist, wird zumindest

dem Cover von Pink Floyds legendärem Album *Dark Side of the Moon* schon irgendwo begegnet sein . . .

Die Illustrationen des sichtbaren Spektrums mit seinem Farbverlauf von *Violett* über *Blau*, *Grün*, *Gelb* und *Orange* bis hin zu *Rot* sind Legion – ebenso wie die Unterschiede in der optischen Anmutung, wenn man solche Abbildungen einmal im Detail betrachtet oder nebeneinander legt. Insofern ergeben sich unmittelbar zwei Fragen:

- Wie lassen sich eigentlich die sichtbaren Wellenlängen, mit denen man ja bestimmte Farben verbindet, in handelsübliche Computerfarbmodelle – etwa **rgb** – umwandeln, um sie auch tatsächlich in einem Dokument nutzen zu können?
- Warum gibt es so viele verschiedene Darstellungen des sichtbaren Spektrums?

Für den in der zweiten Frage angesprochenen Zustand gibt es mehrere Ursachen:

- Zunächst ist das Farbspektrum in seiner Feinausprägung offenbar selbst von der Art seiner Erzeugung abhängig: Neben Prismen werden beispielsweise auch Gitter verwendet (siehe Hoffmann [5]).
- Die Zuordnung von Wellenlängen zu Farben und deren **rgb**-Werten erfolgt durch verschiedenartige Experimente, die wiederum zu unterschiedlichen Resultaten führen können (siehe etwa [3] oder [2]).
- Die experimentell ermittelten Daten erfordern in der Regel eine Nachbearbeitung, die auf unterschiedliche Weise stattfinden kann (siehe unten).
- Selbst der tatsächlich „sichtbare“ Wellenlängenbereich ist in der Literatur durchaus nicht einheitlich spezifiziert, wie der Vergleich in [4] zeigt.
- Gelegentlich werden wohl auch ungeeignete Parameter oder Konvertierungstechniken verwendet, die dann zu falschen oder zumindest verzerrten Darstellungen führen.

Im Folgenden werden wir uns mit der Beantwortung der ersten Frage beschäftigen.

## Experimentelle Daten

Als Beispiel für Parameter, die aus Experimenten gewonnen wurden, sei auf Abbildung 1 verwiesen. Die zugehörigen Daten stammen von [3] und decken einen Wellenlängenbereich von 390 bis 830 nm ab. Auffallend ist, dass die Werte für  $g$  und  $b$  (also *Grün* und *Blau*) sich weitestgehend auf den Bereich zwischen 0 und 1 beschränken, der jedoch von der *Rot*-Komponente  $r$  völlig gesprengt wird: Sowohl deutlich negative als auch unverhältnismäßig große positive Werte treten auf! Für die weitere Verwendung im *rgb*-System auf „normalen“ Ausgabegeräten ist jedoch eine Reduktion auf das Intervall  $[0, 1]$  unabdingbar, was man durch Methoden, die als *gamut compression* bezeichnet werden, erreichen kann, deren Darstellung hier aber zu weit führen würde. Nähere Informationen dazu finden sich bei Hoffmann [5].

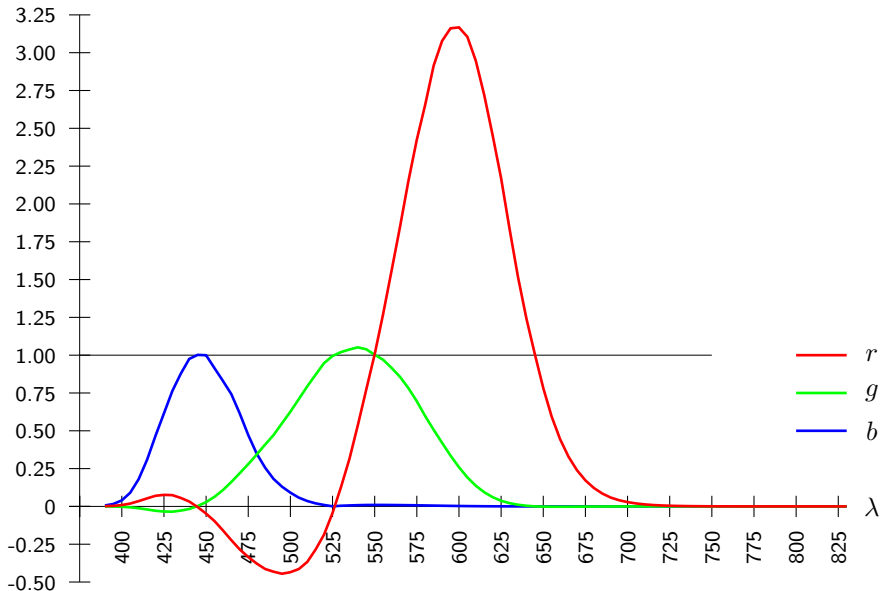


Abbildung 1: Experimentelle *rgb*-Werte

Der umfangreiche Artikel von Young [8] verdeutlicht, wie aufwändig eine solche Nachbearbeitung werden kann und welche Parameter dabei zu berücksichtigen sind. Überdies ist auch eine solche Vorgehensweise letztendlich als

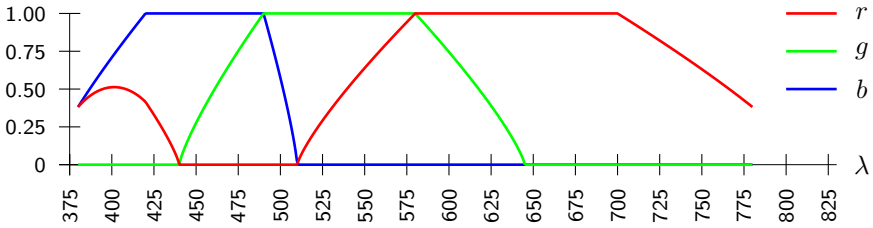


Abbildung 2: Brutons rgb-Werte

Resultat individueller Entscheidungen und persönlicher Präferenzen anzusehen – eine Allgemeingültigkeit oder „Richtigkeit“ des Ergebnisses lässt sich daraus nicht unmittelbar ableiten.

## Der Algorithmus von Bruton

Der Algorithmus von Dan Bruton [1] zur Berechnung von **rgb**-Werten aus Wellenlängen ist als FORTRAN-Programm formuliert; er teilt das sichtbare Spektrum zunächst in Intervalle auf, innerhalb derer jeweils nur einer der **rgb**-Parameter linear verändert wird. Es folgt eine Adjustierung zur Dämpfung der Intensität an den Sichtbarkeitsgrenzen und schließlich eine  $\gamma$ -Korrektur. Sei also  $\lambda$  eine sichtbare Wellenlänge, ausgedrückt in der Einheit Nanometer (nm):  $\lambda \in [380, 780]$ . Weiter sei  $\gamma > 0$  eine feste Zahl ( $\gamma = 0.8$  bei Bruton).

Wir setzen zunächst

$$(\hat{r}, \hat{g}, \hat{b}) := \begin{cases} \left( \frac{440 - \lambda}{440 - 380}, 0, 1 \right) & \text{für } \lambda \in [380, 440[ \\ \left( 0, \frac{\lambda - 440}{490 - 440}, 1 \right) & \text{für } \lambda \in [440, 490[ \\ \left( 0, 1, \frac{510 - \lambda}{510 - 490} \right) & \text{für } \lambda \in [490, 510[ \\ \left( \frac{\lambda - 510}{580 - 510}, 1, 0 \right) & \text{für } \lambda \in [510, 580[ \\ \left( 1, \frac{645 - \lambda}{645 - 580}, 0 \right) & \text{für } \lambda \in [580, 645[ \\ (1, 0, 0) & \text{für } \lambda \in [645, 780] \end{cases} \quad (1)$$

dann, zur Reduzierung der Intensität an den Rändern des Spektrums,

$$f := \begin{cases} 0.3 + 0.7 \cdot \frac{\lambda - 380}{420 - 380} & \text{für } \lambda \in [380, 420[ \\ 1 & \text{für } \lambda \in [420, 700] \\ 0.3 + 0.7 \cdot \frac{780 - \lambda}{780 - 700} & \text{für } \lambda \in ]700, 780] \end{cases} \quad (2)$$

und erhalten schließlich

$$(r, g, b) := ((f \cdot \hat{r})^\gamma, (f \cdot \hat{g})^\gamma, (f \cdot \hat{b})^\gamma) \quad (3)$$

als Parameter der Wellenlänge  $\lambda$  im **rgb**-Farbmodell bei gegebenem  $\gamma$ . Die **rgb**-Werte sind in Abbildung 2 aufgetragen.

## Analyse der Formeln von Bruton

Schon die Abfolge der Farben im Spektrum weist eine unübersehbare Ähnlichkeit zum **hsb**-Farbmodell mit seinen Parametern *Hue* (Farbton), *Saturation* (Sättigung) und *Brightness* (Helligkeit) auf (vgl. Abbildung 3).

Sehen wir uns dazu die Formeln von Bruton einmal etwas näher an! Die Hilfsgrößen  $(\hat{r}, \hat{g}, \hat{b})$  an den Intervallgrenzen von Gleichung (1) repräsentieren wohlbekannte Farben: Für  $\lambda = 380, 440, 490, 510, 580, 645$  erhält man *Magenta*, *Blau*, *Cyan*, *Grün*, *Gelb*, und *Rot*. Diese werden im **hsb**-Modell durch die Farbtöne  $h = \frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{0}{6}$  repräsentiert, während durchweg  $s = b = 1$  gilt. (Die Umrechnung zwischen **rgb**- und **hsb**-Werten ist in der Dokumentation von `xcolor` [7] und der dort angegebenen Literatur beschrieben.) Überdies sind diese **hsb**-Darstellungen unabhängig vom tatsächlichen  $\gamma$ -Wert. Bleibt man in diesem Farbraum, kann man weiterhin feststellen, dass die Reduzierung der Intensität an den Grenzen des sichtbaren Spektrums – in Formeln gefasst durch Gleichung (2) – sich unmittelbar als abnehmender *Brightness*-Parameter an den Rändern interpretieren lässt. Eine einfache Rechnung zeigt, dass die Intervallgrenzen  $\lambda = 380, 780$  des Algorithmus die Farben *Magenta*!0.3 $^\gamma$ !Schwarz beziehungsweise *Rot*!0.3 $^\gamma$ !Schwarz liefern (in der Formelsprache des `xcolor`-Pakets). Nun ist nicht einzusehen, weshalb man diese Intervallgrenzen nicht in vergleichbarer Weise noch fortschreiben sollte, bis man reines *Schwarz* auf beiden Seiten erhält. Damit sind jetzt alle Vorbereitungen getroffen, um einen modifizierten und etwas „natürlicher“ wirkenden Algorithmus zu formulieren.



Abbildung 3: Farben im hsb-System ( $h = 0, 0.01, 0.02, \dots, 1$  im Gegenuhrzeigersinn,  $s = 1, 0.9, \dots, 0.1$  von außen nach innen,  $b = 1, 0.8, 0.6, 0.4$  von links oben nach rechts unten)

### Der modifizierte Algorithmus

Sei  $\lambda > 0$  eine Wellenlänge, gegeben in Nanometern (nm), und sei

$$\varrho : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto (\min\{1, \max\{0, x\}\})^\gamma \quad (4)$$

mit einer festen Korrekturgröße  $\gamma > 0$ . Dann errechnen sich die Koordinaten der zu  $\lambda$  gehörenden Farbe im **hsb**-Farbraum durch

$$h := \frac{1}{6} \cdot \begin{cases} 4 + \varrho\left(\frac{\lambda - 440}{380 - 440}\right) & \text{für } \lambda < 440 \\ 4 - \varrho\left(\frac{\lambda - 440}{490 - 440}\right) & \text{für } \lambda \in [440, 490[ \\ 2 + \varrho\left(\frac{\lambda - 510}{490 - 510}\right) & \text{für } \lambda \in [490, 510[ \\ 2 - \varrho\left(\frac{\lambda - 510}{580 - 510}\right) & \text{für } \lambda \in [510, 580[ \\ 0 + \varrho\left(\frac{\lambda - 645}{580 - 645}\right) & \text{für } \lambda \in [580, 645[ \\ 0 & \text{für } \lambda \geq 645 \end{cases} \quad (5)$$

$$s := 1 \quad (6)$$

$$b := \begin{cases} \varrho\left(0.3 + 0.7 \cdot \frac{\lambda - 380}{420 - 380}\right) & \text{für } \lambda < 420 \\ 1 & \text{für } \lambda \in [420, 700] \\ \varrho\left(0.3 + 0.7 \cdot \frac{\lambda - 780}{700 - 780}\right) & \text{für } \lambda > 700 \end{cases} \quad (7)$$

Dies ist im Grundsatz der Algorithmus, der – gegenwärtig – im **xcolor**-Paket für das **wave**-Farbmodell implementiert ist. Die entsprechenden **hsb**-Werte sind in [Abbildung 4](#) abgetragen.

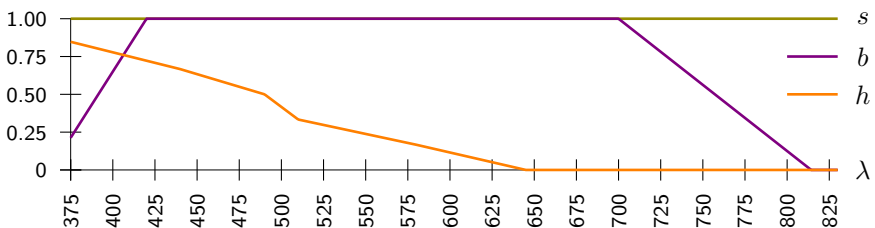


Abbildung 4: **hsb**-Werte des modifizierten Algorithmus

Der Vollständigkeit halber notieren wir noch, dass – unabhängig von  $\gamma$  – gilt:

$$(h, s, b) = \begin{cases} \left(\frac{5}{6}, 1, 0\right) & \text{für } \lambda \leq 380 - \frac{3 \cdot (420 - 380)}{7} = 362.857 \dots \\ (0, 1, 0) & \text{für } \lambda \geq 780 + \frac{3 \cdot (780 - 700)}{7} = 814.285 \dots \end{cases}$$

Beide Koordinatenvektoren entsprechen der Farbe *Schwarz* – beim **hsb**-Modell herrscht bekanntlich keine Eindeutigkeit hinsichtlich der Zuordnung von Parametern zu Farben.

## Die Wahl von $\gamma$

Welches ist nun der beste (oder zumindest ein guter) Wert für  $\gamma$ ? Im ursprünglichen Algorithmus [1] von Bruton wird  $\gamma = 0.8$  gewählt. Freilich scheint es keine signifikanten sichtbaren Unterschiede zwischen den Fällen  $\gamma = 0.8$  und  $\gamma = 1$  zu geben – das ist zumindest die rein subjektive Einschätzung des Autors. Daher wird bei **xcolor** bislang der letztere Wert und folglich ein rein linearer Ansatz verwendet. In Abbildung 5 ist eine Darstellung der Auswirkung verschiedener  $\gamma$ -Werte zu finden.

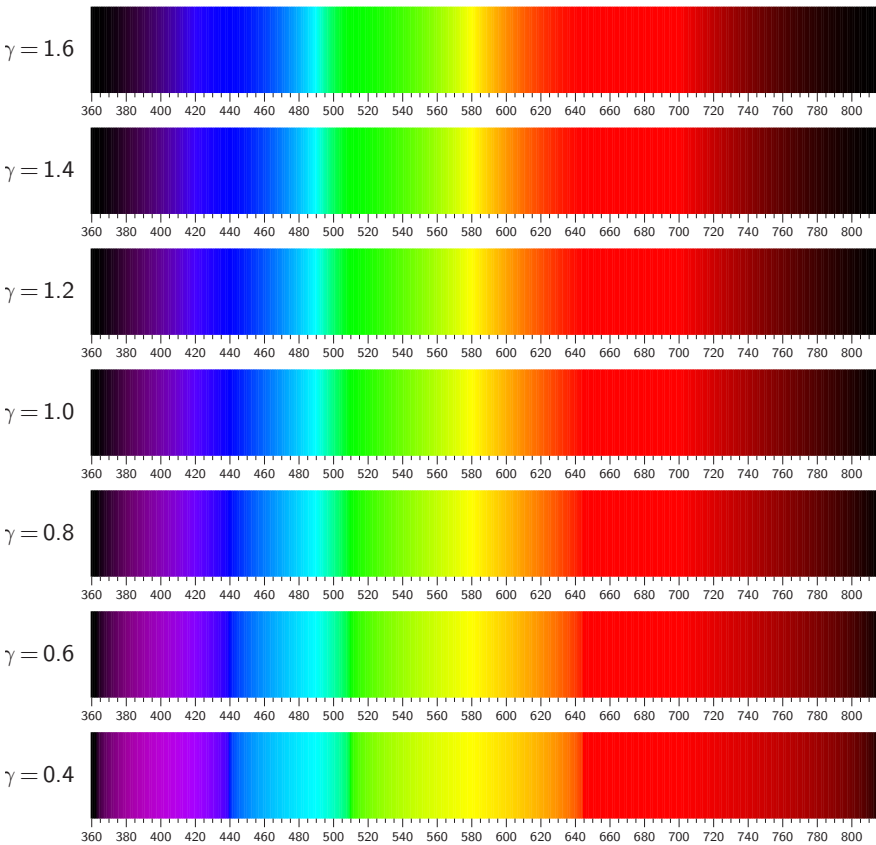
## Anwendung in Dokumenten

Die Anwendung des **wave**-Modells ist denkbar einfach – so wie man es von **rgb**- oder **cmk**-Farben gewohnt ist, lassen sich **wave**-Farben als Namen definieren oder direkt anwenden:

- `\definecolor{foo}{wave}{485.75}` definiert einen Namen zur Wellenlänge  $\lambda = 485,75$  nm, der sodann über `\color{foo}` oder die anderen bekannten Befehlsvarianten eingesetzt werden kann;
- `\color[wave]{485.75}` spezifiziert die Farbe direkt;
- `\psset{linecolor=[wave]{485.75}}` ist eine spezielle Variante für Anwender von **pstricks**.

Ein Unterschied zu den herkömmlichen Farbmodellen ist jedoch signifikant: in **xcolor** gibt es keine Routinen, die eine Umwandlung von anderen Farbmodellen nach **wave** erlauben – im Spektrum fehlen einfach viele Farben, die beispielsweise mittels **rgb** dargestellt werden können, was man leicht anhand des konstanten Sättigungsparameters  $s = 1$  in Gleichung (6) und Abbildung 3 nachvollziehen kann. Graue Farbtöne sieht man in Darstellungen des Spektrums auch eher selten ...



Abbildung 5: Spektrum in Abhängigkeit von  $\gamma$ 

## Einordnung und Ausblick

Neben dem Bruton-Algorithmus und etlichen Verweisen darauf sind dem Autor bei seiner Internetrecherche bislang lediglich eine Reihe von mehr oder weniger umfangreichen Datentabellen begegnet (insbesondere bei [3]), jedoch keine konkreten (in Formeln gefassten) Algorithmen zur Umwandlung von Wellenlängen in numerische Farbwerte. Als Alternative würde sich momentan wohl nur eine tabellenbasierte Vorgehensweise anbieten, die jedoch – wie oben beschrieben – einigen methodischen Modifizierungsaufwand erfordern

würde, wobei überdies der „optische Mehrwert“ noch zu begründen wäre. Insofern ist die aktuelle Implementierung in `xcolor` zwar einigermaßen effizient, aber nicht zwingend endgültig – Hinweise zu einem „besseren“ numerischen Modell des sichtbaren Spektrums sind willkommen.

## Literatur

- [1] Dan Bruton: *Approximate RGB values for Visible Wavelengths*; 1996; Internet: <http://www.physics.sfasu.edu/astro/color/spectra.html>.
- [2] Atmospheric Sciences Data Center: *What Wavelength Goes With a Color?*; 2005; Internet: [http://eosweb.larc.nasa.gov/EDDOCS/Wavelengths\\_for\\_Colors.html](http://eosweb.larc.nasa.gov/EDDOCS/Wavelengths_for_Colors.html).
- [3] Colour und Vision Research Laboratories: *Color Matching Functions*; Internet: <http://cvision.ucsd.edu/database/text/intros/introcmfs.htm>.
- [4] Glenn Elert: *Color* (in: *The Physics Hypertextbook*); 2005; Internet: <http://hypertextbook.com/physics/waves/color/>.
- [5] Gernot Hoffmann: *Newton's Prism Experiment and Goethe's Objections*; 2005; Internet: <http://www.fho-enden.de/~hoffmann/prism16072005.pdf>.
- [6] Uwe Kern: *Farbspielereien in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X mit dem xcolor-Paket; Die T<sub>E</sub>Xnische Komödie*; 16(2), S. 35–53; Juni 2004.
- [7] Uwe Kern: *xcolor – L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X color extensions*; 2005; CTAN: [macros/latex/contrib/xcolor/](http://macros/latex/contrib/xcolor/).
- [8] Andrew T. Young: *Rendering Spectra*; 2005; Internet: <http://mintaka.sdsu.edu/GF/explain/optics/rendering.html>.